

$AE=4$, $AF=7$, $FH=9$ である。

このとき、 $AH = \boxed{\text{ア}}$ 、 $\cos \angle FAH = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$

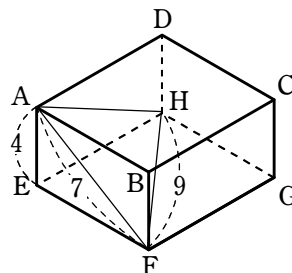
であるから、 $\triangle AFH$ の面積は $\boxed{\text{エオ}} \sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ である。

$\angle AFH$ の二等分線と辺 AH の交点を P とし、
 $\angle FAH$ の二等分線と線分 FP の交点を Q とする。

このとき、 $AP = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ 、 $PQ:QF = 1:\boxed{\text{ケ}}$ であるから、 $\triangle APQ$ の面積は $\triangle AFH$ の

面積の $\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$ 倍である。

また、点 E から $\triangle AFH$ に下ろした垂線の長さは $\frac{\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。



解答 (ア) 8 $\frac{(\text{イ})}{(\text{ウ})} \frac{2}{7}$ $(\text{エオ})\sqrt{(\text{カ})} \quad 12\sqrt{5}$ $\frac{(\text{キ})}{(\text{ク})} \frac{7}{2}$ (ケ) 2
 $\frac{(\text{コ})}{(\text{サシ})} \frac{7}{48}$ $\frac{(\text{ス})\sqrt{(\text{セソ})}}{(\text{タ})} \quad \frac{2\sqrt{55}}{5}$

解説

三平方の定理より

$$EF = \sqrt{AF^2 - AE^2} = \sqrt{7^2 - 4^2} = \sqrt{33}, \quad EH = \sqrt{FH^2 - EF^2} = \sqrt{9^2 - (\sqrt{33})^2} = 4\sqrt{3}$$

よって $AH = \sqrt{AE^2 + EH^2} = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8$

$\triangle AFH$ において、余弦定理により

$$\cos \angle FAH = \frac{AF^2 + AH^2 - FH^2}{2AF \cdot AH} = \frac{7^2 + 8^2 - 9^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \frac{2}{7}$$

このとき $\sin \angle FAH = \sqrt{1 - \cos^2 \angle FAH} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$

したがって、 $\triangle AFH$ の面積は

$$\begin{aligned} \triangle AFH &= \frac{1}{2} AF \cdot AH \sin \angle FAH = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{7} \\ &= 12\sqrt{5} \end{aligned}$$

FP が $\angle AFH$ の二等分線であるから

$$AP : PH = AF : FH = 7 : 9$$

よって $AP = \frac{7}{7+9} AH = \frac{7}{16} \cdot 8 = \frac{7}{2}$

Q が $\angle FAH$ の二等分線であるから

$$PQ : QF = AP : AF = \frac{7}{2} : 7 = 1 : 2$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad \triangle APQ &= \frac{PQ}{PF} \triangle APF = \frac{1}{1+2} \triangle APF \\ &= \frac{1}{3} \triangle APF = \frac{1}{3} \cdot \frac{AP}{AH} \triangle AFH \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{7+9} \triangle AFH = \frac{7}{48} \triangle AFH \end{aligned}$$

また、四面体 AEFH の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3} \triangle EFH \cdot AE = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{33} \cdot 4\sqrt{3} \right) \cdot 4 = 8\sqrt{11}$$

E から $\triangle AFH$ に下ろした垂線の長さを h とすると

$$V = \frac{1}{3} \triangle AFH \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{5} \cdot h = 4\sqrt{5} h$$

よって $4\sqrt{5} h = 8\sqrt{11}$

したがって $h = \frac{8\sqrt{11}}{4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{55}}{5}$

