

m は定数とする。2 次不等式 $x^2 + mx + 2m + 5 > 0$ …… ① を考える。

(1) ① の解がすべての実数であるとき、 m の値の範囲は $\boxed{\text{アイ}} < m < \boxed{\text{ウエ}}$ である。

(2) $m = -4$ のとき、① の解を $x < \alpha$, $\beta < x$ とすると

$$|\alpha| = \sqrt{\boxed{\text{オ}}} - \boxed{\text{カ}}, \quad |\beta| = \sqrt{\boxed{\text{キ}}} + \boxed{\text{ク}}$$

である。

また、 $|\alpha| \leq x \leq |\beta|$ を解とする 2 次不等式の 1 つは $x^2 - \boxed{\text{ケ}} \sqrt{\boxed{\text{コ}}} x + \boxed{\text{サ}} \leq 0$

である。

【解答】 (アイ) -2 (ウエ) 10 $\sqrt{(\text{オ})} - (\text{カ})$ $\sqrt{7} - 2$ $\sqrt{(\text{キ})} + (\text{ク})$ $\sqrt{7} + 2$
(ケ) $\sqrt{(\text{コ})}$ $2\sqrt{7}$ (サ) 3

【解説】

(1) 2次方程式 $x^2 + mx + 2m + 5 = 0$ の判別式を D とすると,

① の解がすべての実数であるから

$$D < 0 \quad \text{よって} \quad D = m^2 - 4(2m + 5) < 0$$

$$\text{すなわち} \quad m^2 - 8m - 20 < 0$$

$$(m + 2)(m - 10) < 0$$

$$\text{よって} \quad -2 < m < 10$$

(2) $m = -4$ のとき, ① は $x^2 - 4x - 3 > 0$

$$\text{よって, これを解くと} \quad x < 2 - \sqrt{7}, \quad 2 + \sqrt{7} < x$$

$$\text{ゆえに} \quad \alpha = 2 - \sqrt{7}, \quad \beta = 2 + \sqrt{7}$$

$$\text{したがって} \quad |\alpha| = |2 - \sqrt{7}| = \sqrt{7} - 2$$

$$|\beta| = |2 + \sqrt{7}| = \sqrt{7} + 2$$

$|\alpha| \leq x \leq |\beta|$ を解とする2次不等式の1つは

$$(x - |\alpha|)(x - |\beta|) \leq 0$$

$$\text{すなわち} \quad x^2 - (|\alpha| + |\beta|)x + |\alpha||\beta| \leq 0$$

$$\text{ここで} \quad |\alpha| + |\beta| = (\sqrt{7} - 2) + (\sqrt{7} + 2) = 2\sqrt{7}$$

$$|\alpha||\beta| = (\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2) = 3$$

$$\text{ゆえに} \quad x^2 - 2\sqrt{7}x + 3 \leq 0$$