入試問題演習 《 積分法 》2022/02/05

$\boxed{1}$ [埼玉大]

2 次関数 $f(x)$ に対して，関数 $F(x)$ を $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ と定める。方程式 $F(x)=0$ は異なる 3 つの実数解をもつとする。これらの解のうち，最大の解と最小の解の絶対値は一致する。このとき，2 次方程式 $f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもつことを示せ。

解答　略

解説

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ の両辺に $x=0$ を代入すると　$F(0)=0$

よって，方程式 $F(x)=0$ は $x=0$ を解にもつ。

方程式 $F(x)=0$ は異なる 3 つの実数解をもつから，$x=0$ 以外の解を　$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，3 つの解の大小関係について　$0<\alpha<\beta$，　$\alpha<0<\beta$，　$\alpha<\beta<0$ の場合が考えられる。

ここで，最大の解と最小の解の絶対値が一致することから，$\alpha<0<\beta$ の場合のみが適しており，$\alpha=-\beta$ である。

ゆえに，$F(x)=ax(x+\beta)(x-\beta)=a(x^3-\beta^2x)\ (a\neq 0)$と表される。

よって　$F'(x)=a(3x^2-\beta^2)$

また，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ の両辺を x で微分すると　$F'(x)=f(x)$

よって　$f(x)=a(3x^2-\beta^2)=3a\left(x^2-\dfrac{\beta^2}{3}\right)=3a\left(x+\dfrac{\beta}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\dfrac{\beta}{\sqrt{3}}\right)$

$\beta>0$ であるから，2 次方程式$f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもつ。

$\boxed{2}$ [宮崎大]

a は $0<a<1$ の範囲の定数とする。直線 $\ell : y=1-a^2$ と曲線 $C : y=1-x^2\ (x\geqq 0)$ について

(1)　曲線 C，y 軸，直線 ℓ で囲まれる部分の面積を S_1 とし，曲線 C，直線 ℓ，直線 $x=1$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1，S_2 を a を用いて表せ。

(2)　$S=S_1+S_2$ とおくとき，$0<a<1$ の範囲における S の最小値を求めよ。

解答　(1)　$S_1=\dfrac{2}{3}a^3$，$S_2=\dfrac{2}{3}a^3-a^2+\dfrac{1}{3}$　　(2)　$a=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{4}$

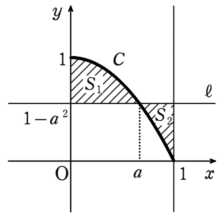
解説

(1)　直線 ℓ と曲線 C の交点の x 座標は，

$1-a^2=1-x^2$ から　$x^2=a^2$

$x\geqq 0$，$0<a<1$ であるから　$x=a$

したがって，図から



$$S_1=\int_0^a\{(1-x^2)-(1-a^2)\}dx=\int_0^a(a^2-x^2)dx$$
$$=\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{2}{3}a^3$$
$$S_2=\int_a^1\{(1-a^2)-(1-x^2)\}dx=\int_a^1(x^2-a^2)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-a^2x\right]_a^1=\frac{2}{3}a^3-a^2+\frac{1}{3}$$

(2)　(1) の結果から　$S=S_1+S_2=\dfrac{4}{3}a^3-a^2+\dfrac{1}{3}$

ゆえに　$S'=4a^2-2a=2a(2a-1)$

$S'=0$ とすると　$a=0,\ \dfrac{1}{2}$

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
S'		$-$	0	$+$	
S		↘	極小	↗	

$0<a<1$ における S の増減表は右のようになる。

よって，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，S は極小かつ最小となり，最小値は

$$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$$